



DISCIPLINA: CALCULO B

UNIDADE II - LISTA DE EXERCÍCIOS

Domínio, Imagem e Curvas/Superfícies de Nível

[1] Determine o domínio de cada uma das funções abaixo e represente-o graficamente:

$$(1.1) f(x, y) = \frac{1}{x^2 - 1} + \sqrt{y - x^2} \quad (1.2) f(x, y) = \sqrt{y^2 - 4} \ln(x - y)$$

$$(1.3) f(x, y) = \ln(x^2 - y^2) \quad (1.4) f(x, y) = \ln \left[\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2} \right]$$

$$(1.5) f(x, y) = \arccos(x - y) \quad (1.6) f(x, y) = \operatorname{arcsec} \left(\frac{x^2}{4} + y^2 \right)$$

[2] Determine o domínio; determine e trace as interseções do gráfico com os planos coordenados; determine e trace as curvas de nível; e esboce o gráfico das funções:

$$(2.1) f(x, y) = 16 - x^2 - y^2 \quad (2.2) f(x, y) = 9x^2 + 4y^2$$

$$(2.3) f(x, y) = x^2 \quad (2.4) f(x, y) = \frac{1}{1 + y^2}$$

$$(2.5) f(x, y) = 8 - 2x - 4y \quad (2.6) f(x, y) = \frac{4}{x^2 + 4y^2}$$

$$(2.7) f(x, y) = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$$

[3] Descreva as curvas/superfícies de nível da cada função:

$$(3.1) f(x, y) = e^{-4x^2 - y^2} \quad (3.2) F(x, y, z) = 2x + 3y + 6z$$

$$(3.3) F(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$$

Limites, Continuidade e Diferenciabilidade

[4] Determine se o limite existe. Se existir, determine o seu valor:

$$(4.1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (4.2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2)$$

$$(4.3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \arctg \left(\frac{|x| + |y|}{x^2 + y^2} \right) \quad (4.4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos \left(\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \right)$$

$$(4.5) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{(x + y - 4)(x^2 + xy)}{(x - 1) + (y - 3)} \quad (4.6) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{x + y^2}$$

[5] Defina $f(0, 0)$ de maneira que f se estende a uma função contínua na origem:

$$(5.1) \quad f(x, y) = \ln \left(\frac{3x^2 - x^2y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \right) \quad (5.2) \quad f(x, y) = \frac{2xy^2}{x^2 + y^2}$$

[6] Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(6.1) Estude a continuidade de f no seu domínio.

(6.2) Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(0, 0)$.

[7] Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 + \frac{(x-2)^3}{(x-2)^2 + (y-1)^2} & \text{se } (x, y) \neq (2, 1) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (2, 1) \end{cases}$$

(7.1) Estude a continuidade de f no seu domínio.

(7.2) Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(2, 1)$.

[8] Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} & \text{se } (x, y) \neq (1, 1) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (1, 1) \end{cases}$$

(8.1) Estude a continuidade de f no seu domínio.

(8.2) Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(1, 1)$.

Derivadas Parciais de 1ª ordem

[9] Calcule as derivadas parciais das seguintes funções:

$$\begin{array}{lll} (9.1) \quad z = \int_{x^2}^{2y^2} e^{-t^2} dt & (9.2) \quad z = \arcsen(\sqrt{xy}) & (9.3) \quad z = e^{y/x} \ln \left(\frac{x^2}{y} \right) \\ (9.4) \quad w = xyz + z \sin(xyz) & (9.5) \quad w = \ln(x^2y^3z^4) & (9.6) \quad w = \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2} \end{array}$$

[10] Para as funções abaixo calcule, caso exista, as derivadas parciais, nos pontos indicados:

$$(10.1) f(x, y) = x \cos \left(\frac{x}{y} + \pi \right); P_0(0, 1)$$

$$(10.2) f(x, y) = \arctg \sqrt{4x^2 - y^2}; P_0(1, 1)$$

$$(10.3) f(x, y, z) = \sqrt{x} + \left(\operatorname{sen}^2 y \right) \operatorname{tg} z; P_0(4, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$$

$$(10.4) f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2 + 2y}{x^2 - y} & ; \text{ se } y \neq x^2 \\ 3 & ; \text{ se } y = x^2 \end{cases}; P_0(1, 0) \text{ e } P_1(1, 1).$$

[11] Verificar a identidade proposta para cada função dada:

$$(11.1) z = xy^3 - x^3y; \quad y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = y^4 - x^4$$

$$(11.2) w = \ln (e^x + e^y + e^z); \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 1$$

$$(11.3) z = x \ln (x^2 + y^2) - 2y \arctg(\frac{y}{x}); \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + 2x$$

$$(11.4) z = \frac{x - y}{xy}; \quad x \frac{\partial z}{\partial y} + y \frac{\partial z}{\partial x} = -z$$

[12] Ligando-se em paralelo n resistências R_1, R_2, \dots, R_n , a resistência total R é dada por $\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$. Verifique que $\frac{\partial R}{\partial R_i} = \left(\frac{R}{R_i} \right)^2$.

[13] Considere a função dada por $w = xy + z^4$, onde $z = f(x, y)$. Se $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) = 4$ e $f(1, 1) = 1$, calcule $\frac{\partial w}{\partial x}(1, 1)$.

Derivadas Parciais de Ordem Superior

[14] Calcule as derivadas parciais de segunda ordem de:

$$(14.1) z = x^3y - 2x^2y^2 + 5xy - 2x \quad (14.2) z = x \cos(xy) - y \operatorname{sen}(xy)$$

$$(14.3) z = \cos(x^3 + xy) \quad (14.4) z = e^{x^2+y^2}$$

$$(14.5) w = e^{xyz} \quad (14.6) w = x^2y^3z^4$$

[15] Provar as identidades:

$$(15.1) f(x, t) = \operatorname{sen}(apx) \operatorname{sen}(pt); \quad a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$(15.2) V(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct); \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0; \quad f \text{ e } g \text{ são funções deriváveis.}$$

[16] Uma função f de x e y é harmônica se satisfazem à equação de Laplace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Prove que as funções a seguir são harmônicas:

$$(16.1) f(x, y) = e^{-x} \cos(y)$$

$$(16.2) f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$(16.3) f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), x > 0.$$

Regra da Cadeia

[17] Usando a regra da cadeia para $z = f(x, y)$ e $w = f(x, y, z)$, calcule $\frac{dz}{dt}$ e $\frac{dw}{dt}$:

$$(17.1) z = x^2 + 2y^2, x = \sin(t), y = \cos(t)$$

$$(17.2) z = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), x = \ln(t), y = e^t$$

$$(17.3) w = e^{-x}y^2 \sin(z), x = t, y = 2t, z = 3t$$

$$(17.4) w = x^2 + y^2 + z^2, x = e^t, y = e^t \cos(t), z = e^t \sin(t)$$

[18] Usando a regra da cadeia para $z = f(x, y)$ e $w = f(x, y, z)$, calcule $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial w}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$, e $\frac{\partial w}{\partial r}$:

$$(18.1) z = x^2 - y^2, x = 3t - s, y = t + 2s$$

$$(18.2) z = e^{\frac{y}{x}}, x = 2s \cos(t), y = 4s \sin(t)$$

$$(18.3) w = xy + yz + zx, x = tr, y = st, z = ts$$

$$(18.4) w = \ln(xy + yz + zx), x = t^2r, y = st^2, z = t^2s$$

[19] Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de uma variável real, diferenciável e tal que $\phi'(1) = 4$.

Seja $g(x, y) = \phi\left(\frac{x}{y}\right)$. Calcule:

$$(19.1) \frac{\partial g}{\partial x}(1, 1)$$

$$(19.2) \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1)$$

[20] Seja $f(x, y) = g(x^2y, x^3y^2)$, onde f e g são funções diferenciáveis. Sabendo-se que

$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 16$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = 8$, calcule as derivadas parciais de g no ponto $(4, 8)$.

[21] Considere $f(x, y) = \ln(xy^2) + \operatorname{arctg}(x^2 - y)$.

$$(21.1) \text{ Calcule } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2, 3).$$

$$(21.2) \text{ Se } x = g(u, v) = uv + 2v, y = h(u, v), h(0, 1) = 3, \frac{\partial h}{\partial u}(0, 1) = 2 \text{ e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 1) = -4, \text{ calcule } \frac{\partial f}{\partial u}(0, 1) \text{ e } \frac{\partial h}{\partial v}(0, 1).$$

[22] Seja $f(x, y, z) = g(e^{xyz}, x^2y^2z^2)$. Determine o valor da constante β , sabendo-se que

$$\beta x \frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Diferencial Total

[23] Seja $f(x, y) = e^{x-y}$. Usando a diferencial total, calcule o valor de

$$f\left((\ln 2) + 0.1, (\ln 2) + 0.04\right).$$

[24] Seja $w = (xyz)^{3/2}$.

(24.1) Ache o diferencial de w .

(24.2) Use diferenciais para estimar o erro máximo no valor de w , com um possíveis erros no máximo de $\pm 0,1$ em cada um dos três números x, y e z , se x, y e z são números reais positivos menores ou iguais 4.

[25] Use a diferencial total para encontrar aproximadamente o erro máximo no cálculo da área de um triângulo retângulo, cujos catetos têm como medida 6 *cm* e 8 *cm* respectivamente, com um possível erro de 0,1 *cm* para cada medida. Encontre também a porcentagem aproximada de erro.

[26] Uma industria vai produzir 10.000 caixas fechadas de papelão, com dimensões 3 *cm*, 4 *cm* e 5 *cm*. O custo do papelão a ser usado é de R\$5 por *cm*². Se as maquinas usadas para cortar os pedaços de papelão têm um possível error de 0,005 *cm* em cada dimensão, encontrar aproximadamente, usando diferencial total, o máximo erro possível na estimativa do custo do papelão.

[27] Determinar o maior erro cometido no cálculo da aceleração da gravidade através de um pêndulo cujo período é dado por $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Considerar o comprimento do pêndulo igual a 1 *m* com um erro admissível de 0,05 *cm* e $T = 2$ *seg* com um erro admissível de 0,01 *seg*.

Derivadas Parciais como Taxa de Variação

[28] Um cone tem altura igual a 10 *m* e o raio 4 *m*; o crescimento da altura é de $\frac{1}{2}$ *m/seg* e o raio $\frac{1}{4}$ *m/seg*. Qual a velocidade de crescimento do volume do cone?

[29] Determinar a rapidez com que está mudando o volume de um paralelepípedo retângulo de dimensões x, y e z . Sabe-se que aresta x aumenta 2 *cm* por segundo, a y diminui 1 *cm*

por segundo e a z aumenta 2 cm por segundo. No momento considerado $x = 8\text{ cm}$, $y = 10\text{ cm}$, $z = 12\text{ cm}$.

[30] Considere a lei de um gás ideal confinado, $PV = kT$, para $k = 10$. Determine a taxa de variação da temperatura no instante em que o volume do gás é de 120 cm^3 e o gás está sob pressão de 8 N/cm^2 , sabendo que o volume cresce à razão de $2\text{ cm}^3/\text{seg}$ e a pressão decresce à razão de $0,1\text{ N/cm}^2$.

[31] Num dado instante, o comprimento de um lado de um retângulo é 6 cm e cresce à taxa de $1\text{ cm}/\text{seg}$ e o comprimento do outro lado é 10 cm e decresce à taxa de $2\text{ cm}/\text{seg}$. Encontre a taxa de variação da área do retângulo, no dado instante.

[32] Em um dado instante, o comprimento de cateto de um triângulo retângulo é 10 cm e cresce à razão de $1\text{ cm}/\text{min}$ e o comprimento do outro é 12 cm e decresce à razão de $2\text{ cm}/\text{min}$. Encontre a razão de variação da medida do ângulo agudo oposto ao cateto de 12 cm de comprimento, no dado instante.

Diferenciação Implícita

[33] Suponha que $z = f(x, y)$ é definida implicitamente como uma função de x e y pela equação $x^{2/3} + 2y^{2/3} + 3z^{2/3} = 1$, onde x, y , e z são números reais positivos. Usando derivação implícita, calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$.

[34] Se z é uma função de x e y definida implicitamente pela equação $xyz = \cos(x+y+z)$, determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ no ponto $(0, \pi/4, \pi/4)$.

[35] Se z é uma função de x e y definida implicitamente pela equação $y + x^{(z-1)} + y^2z = 1$, calcule $\frac{\partial z}{\partial x}(2, 0)$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(2, 0)$.

Plano Tangentes, Reta Tangentes e Normais

[36] Encontre a equação do plano tangente e da reta normal a cada superfície abaixo, nos pontos indicados:

(36.1) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ em $P = (1, 1, 1)$

(36.2) $xyz = 6$ no ponto cuja projeção no plano $y = 0$ é $(1, 0, 3)$

(36.3) $\cos(xy) + \sin(yz) = 0$ em $P = (1, \pi/6, -2)$

(36.4) $x^3 + y^3 + z - 6xy = 0$ para $x = y = 2$

(36.5) $g(x, y) = x^y$ em $(1, 1, 1)$

[37] Determine o plano tangente ao gráfico de $z = xy$ que passa pelos pontos $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$.

[38] Dada a superfície $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, determine as equações dos planos tangentes que são paralelos ao plano $x + 4y + 6z = 0$.

[39] Ache os pontos da superfície $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2x = 0$ para os quais os planos tangentes são paralelos aos planos coordenados.

[40] Ache um vetor normal e a equação da reta tangente a cada curva no ponto indicado:

$$(40.1) \ x^2 + y^2 = 2, \ P_0(1, 1) \quad (40.2) \ e^{2x-y} + 2x + 2y = 4, \ P_0(1/2, 1)$$

[41] Encontre o vetor direção da reta tangente no ponto dado da curva C que é interseção das superfícies:

$$(41.1) \ xz + 2x + 4z = 5 \text{ e } 4xy + 3y + 6z = 56, \text{ no ponto } (2, 5, 1/6).$$

$$(41.2) \ x^2 - 2xz + y^2z = 1 \text{ e } 3xy + 2yz = -6, \text{ no ponto } (1, -2, 0).$$

Derivada direcional e gradiente
--

[42] Calcule o gradiente das seguintes funções:

$$(42.1) \ z = 2x^2 + 5y^2 \quad (42.2) \ z = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$(42.3) \ w = 3x^2 + y^2 - 4z^2 \quad (42.4) \ w = \cos(xy) + \sin(yz)$$

$$(42.5) \ w = \ln(x^2 + y^2 + z^2) \quad (42.6) \ w = e^z \cos(2x) \cos(3y)$$

[43] Determine a derivada direcional da função dada na direção \vec{v} :

$$(43.1) \ z = 2x^2 + 5y^2, \ \vec{v} = (\cos(\frac{\pi}{2}), \sin(\frac{\pi}{2}))$$

$$(43.2) \ z = \frac{1}{x^2 + y^2}, \ \vec{v} = (1, 1)$$

$$(43.3) \ z = y^2 \operatorname{tg}^2(x), \ \vec{v} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}, 1)$$

$$(43.4) \ w = \cos(xy) + \sin(yz), \ \vec{v} = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

$$(43.5) \ w = \ln(x^2 + y^2 + z^2), \ \vec{v} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, -1, -1)$$

$$(43.6) \ w = e^{1+x^2+y^2+z^2}, \ \vec{v} = (1, 0, 1)$$

[44] Determine o valor máximo da derivada direcional da função f no ponto dado e a direção em que ocorre:

$$(44.1) \ z = 2x^2 + 3y^2, \ P = (1, -1)$$

$$(44.2) \ z = e^{2y} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{3x}\right), \ P = (1, 3)$$

$$(44.3) \ w = \cos(yz) + \sin(xy), \ P = (-3, 0, 7)$$

$$(44.4) \ w = 2xyz + y^2 + z^2, \ P = (1, 1, 1)$$

[45] Suponha que numa certa região do espaço o potencial elétrico V seja dado por

$$V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$$

(45.1) Determine a taxa de variação do potencial em $P(3, 4, 5)$ na direção do vetor

$$\vec{v} = (1, 1, -1).$$

(45.2) Em que direção V varia mais rapidamente em P ?

(45.3) Qual a taxa máxima de variação em P ?

[46] Uma equação da superfície de uma montanha é $z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$, a distância está em metros, os pontos do eixo x a leste e os pontos do eixo y a norte. Um alpinista está no ponto correspondente a $(-10, 5, 850)$.

(46.1) Qual é a direção da parte que tem inclinação mais acentuada?

(46.2) Se o alpinista se mover na direção leste ele estará subindo ou descendo, e qual será esta razão?

(46.3) Se o alpinista se mover na direção sudoeste, ele estará subindo ou descendo, e qual será esta razão?

(46.4) Em qual direção ele estará percorrendo um caminho plano?

[47] Uma chapa de metal aquecida em um plano xy de tal modo que a temperatura T é inversamente proporcional à distância da origem. Se a temperatura em $P(3, 4)$ é 100° , determine a taxa de variação de T em P na direção do vetor $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$. Em que direção e sentido T cresce mais rapidamente em P ? Em que direção a taxa de variação é nula?

Pontos Críticos

[48] Determine e classifique os pontos críticos de:

$$(48.1) z = e^{1+x^2+y^2}$$

$$(48.2) z = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$$

$$(48.3) z = (x^2 - 1)(y^2 - 4)$$

$$(48.4) z = \frac{1}{x} - \frac{64}{y} + xy$$

$$(48.5) z = \frac{2x + 2y + 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$(48.6) z = \sin(x + y) + \sin x + \sin y$$

$$(48.7) z = x^4 + xy + y^2 - 6x - 5y$$

$$(48.8) z = \log_4(xyz)$$

[49] Determine a distância mínima entre $4x^2 + 4y - z = 0$ e o ponto $(0, 0, 8)$.

[50] Determine as dimensões do retângulo de menor perímetro e de área 16 cm^2 .

[51] Uma aplicação num doente de x miligramas de um remédio A e y miligramas de um medicamento B ocasiona uma resposta $R = R(x, y) = x^2y^3(c - x - y)$, ($c > 0$). Que quantidade de cada remédio dará a melhor resposta?

[52] O custo do material utilizado na fabricação de uma caixa retangular sem tampa, deve ser R\$10,00. Se o material para o fundo da caixa custa 15 centavos por centímetro quadrado e o material para os lados custa 30 centavos por centímetro quadrado, encontre as dimensões da caixa de volume máximo que pode ser fabricada.

Multiplicadores de Lagrange

[53] Determine os pontos extremos de:

(53.1) $z = 25 - x^2 - y^2$ tais que $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

(53.2) $z = x^2 + 2xy + y^2$ tais que $x - y = 3$.

(53.3) $z = 4x^2 + 2y^2 + 5$ tais que $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

(53.4) $w = x^2 + y^2 + z^2$ tais que $3x - 2y - 4 = 0$.

(53.5) $w = x + y + z$ tais que $x^2 - y^2 + z^2 = 4$.

[54] De todos os triângulos de perímetro fixo, determine o de maior área.

[55] Determine o ponto P na elipse $x^2 + 2y^2 = 6$ e o ponto Q na reta $x + y = 4$ tal que a distância de P a Q seja a menor possível.

[56] Suponha que a temperatura de um ponto (x, y, z) é dado por $x + 2y + 3z$. Determine as temperaturas extremas (maxima e minima) na esfera de raio 1 centrado na origin, e ache os pontos onde estas temperaturas extremas são atingidas.

[57] Mostre que o volume do maior paralelepípedo retangular que pode ser inscrito num elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ é $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

[58] Mostre que o volume máximo de um cilindro circular com área total fixo é igual 1 é $\frac{1}{3\sqrt{6\pi}}$.

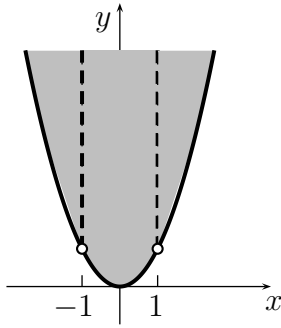
[59] Determine os pontos na superfície $xyz = 1$ que são proximo à origem.

[60] Uma caixa retangular sem tampa deve ter um volume de $32m^3$. Encontre as dimensões da caixa que tem a menor área superficial.

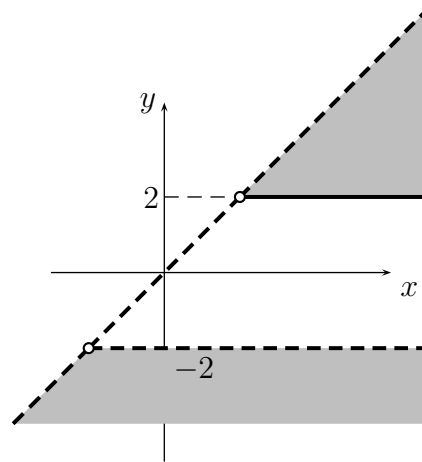
Respostas

[1]

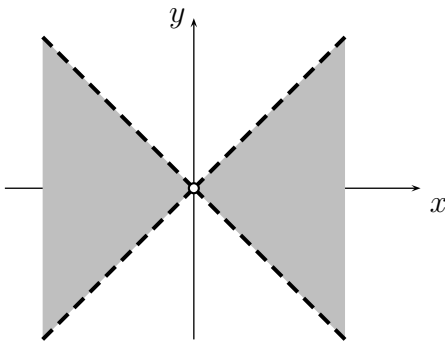
$$(1.1) \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - 1 \neq 0 \text{ e } y \geq x^2\}$$



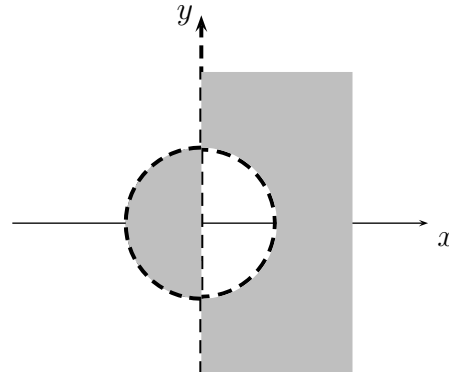
$$(1.2) \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 2 \text{ ou } y \leq -2 \text{ e } x > y\}$$



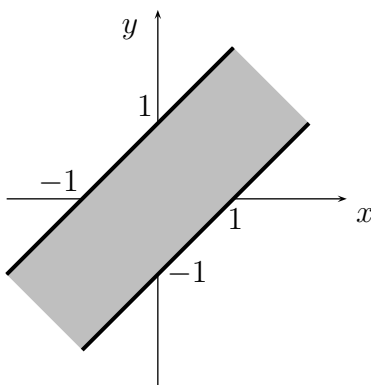
$$(1.3) \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 > 0\}$$



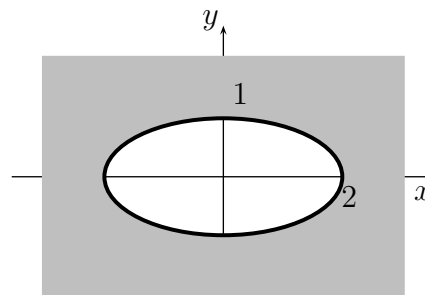
$$(1.4) \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0 \text{ e } \frac{x^2 + y^2 - 1}{x} > 0 \right\}$$



$$(1.5) \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x - y \leq 1\}$$



$$(1.6) \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{4} + y^2 \leq -1 \text{ ou } \frac{x^2}{4} + y^2 \geq 1\}$$



[3]

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad & \left\{ \begin{array}{l} k < 0, \text{ curvas de nível é vazio} \\ 0 < k < 1, \text{ curvas de nível são elipses de semi eixos } \frac{\sqrt{-\ln k}}{2} \text{ e } \sqrt{-\ln k} \\ k = 1, \text{ curvas de nível é o ponto } (0, 0) \\ k > 1, \text{ curvas de nível é vazio} \end{array} \right. \\
 (3.2) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \text{Para } w = k, \ 2x + 3y + 6z = k, \text{ representa uma família de planos paralelos} \\ \text{de normal } (2, 3, 6), \text{ para qualquer } k. \end{array} \right. \\
 (3.3) \quad & \left\{ \begin{array}{l} k < 0, \ x^2 - y^2 + z^2 = k, \text{ superfícies de nível são hiperbolóides de 2 folhas} \\ k = 0, \ x^2 - y^2 + z^2 = 0, \text{ superfícies de nível são cones circular} \\ k > 0, \ x^2 - y^2 + z^2 = k, \text{ superfícies de nível são hiperbolóides de 1 folha} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$[4] \left\{ \begin{array}{l} (4.1) \text{ não existe} \quad (4.2) 0 \quad (4.3) \frac{\pi}{2} \quad (4.4) 1 \quad (4.5) 4 \quad (4.6) \text{ não existe} \end{array} \right.$$

$$[5] \left\{ \begin{array}{l} (5.1) f(0, 0) = \ln 3 \quad (5.2) f(0, 0) = 0 \end{array} \right.$$

$$[6] \left\{ \begin{array}{l} (6.1) f \text{ é contínua em } \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \quad (6.2) f \text{ não é diferenciável em } (0, 0). \end{array} \right.$$

$$[7] \left\{ \begin{array}{l} (7.1) f \text{ é contínua em } \mathbb{R}^2. \quad (7.2) f \text{ não é diferenciável em } (2, 1). \end{array} \right.$$

$$[8] \left\{ \begin{array}{l} (8.1) f \text{ é contínua em } \mathbb{R}^2 - \{(1, 1)\} \quad (8.2) f \text{ não é diferenciável em } (1, 1). \end{array} \right.$$

[9]

$$\begin{aligned}
 (9.1) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = -2xe^{-x^4} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 4ye^{-4y^4} \end{array} \right. \quad (9.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x - x^2y}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{y - xy^2}} \end{array} \right. \\
 (9.3) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = \left[\frac{-y}{x^2} \ln \left(\frac{x^2}{y^2} \right) + \frac{2}{x} \right] e^{y/x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \left[\frac{1}{x} \ln \left(\frac{x^2}{y^2} \right) - \frac{1}{y} \right] e^{y/x} \end{array} \right. \quad (9.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial x} = yz + yz^2 \cos(xyz) \\ \frac{\partial w}{\partial y} = xz + xz^2 \cos(xyz) \\ \frac{\partial w}{\partial z} = xy + \sin(xyz) + xyz \cos(xyz) \end{array} \right. \\
 (9.5) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial x} = 2/x \\ \frac{\partial w}{\partial y} = 3/y \\ \frac{\partial w}{\partial z} = 4/z \end{array} \right. \quad (9.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2 + z^2 - 2x(y + z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \\ \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2 + z^2 - 2y(x + z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{x^2 + y^2 - z^2 - 2z(x + y)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

[10]

$$\left\{ \begin{array}{ll} (10.1) \ f_x(P_0) = -1, \ f_y(P_0) = 0 & (10.2) \ f_x(P_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \ f_y(P_0) = \frac{-\sqrt{3}}{12} \\ (10.3) \ f_x(P_0) = \frac{1}{4}, \ f_y(P_0) = 1, \ f_z(P_0) = 1 & (10.4) \ f_x(P_0) = 0, \ f_y(P_0) = 5, \nexists f_x(P_1), \nexists f_y(P_1) \end{array} \right.$$

[13] 17

[14]

$$(14.1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy - 4y^2 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4x^2 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3x^2 - 8xy - 5 \end{array} \right.$$

$$(14.2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 z}{\partial x} = (y^3 - 2y) \sin(xy) - xy^2 \cos(xy) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y} = x^2 y \sin(xy) - (x^3 + 2x) \cos(xy) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (xy^2 - 2x) \sin(xy) - (x^2 y + 2y) \cos(xy) \end{array} \right.$$

$$(14.3) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6x \sin(x^3 + xy) - (3x^2 + y)^2 \cos(x^3 + xy) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^2 \cos(x^3 + xy) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\sin(x^3 + xy) - x(3x^2 + y) \cos(x^3 + xy) \end{array} \right. \quad (14.4) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (2 + 4x^2)e^{x^2+y^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (2 + 4y^2)e^{x^2+y^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xye^{x^2+y^2} \end{array} \right.$$

$$(14.5) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = y^2 z^2 e^{xyz} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = x^2 z^2 e^{xyz} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = x^2 y^2 e^{xyz} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = (z + xyz^2)e^{xyz} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = (y + xy^2 z)e^{xyz} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = (x + x^2 y z)e^{xyz} \end{array} \right. \quad (14.6) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2y^3 z^4 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 6x^2 y z^4 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 12x^2 y^3 z^2 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 6xy^2 z^4 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 8xy^3 z^3 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 12x^2 y^2 z^3 \end{array} \right.$$

[17]

$$\left\{ \begin{array}{ll} (17.1) \ -2 \sin t \cos t & (17.2) \ \frac{e^t(-1 + t \ln t)}{t[e^{2t} + (\ln t)^2]} \\ (17.3) \ e^{-t}[-4t^2 \sin(3t) + 8t \sin(3t) + 12t^2 \cos(3t)] & (17.4) \ 4e^{2t} \end{array} \right.$$

[18]

$$(18.1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial t} = 16t - 10s \\ \frac{\partial t}{\partial z} = -10t - 6s \end{array} \right. \quad (18.2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial t} = 2 \sec^2 t \cdot e^{2 \operatorname{tg} t} \\ \frac{\partial t}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

$$(18.3) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} = 2st(2r + s) \\ \frac{\partial w}{\partial s} = 2t^2(r + s) \\ \frac{\partial w}{\partial r} = 2st^2 \end{array} \right. \quad (18.4) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{4}{t} \\ \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{2(r + s)}{s(2r + s)} \\ \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{2}{2r + s} \end{array} \right.$$

$$[19] \left\{ \begin{array}{ll} (19.1) & 4 \\ (19.2) & -4 \end{array} \right.$$

$$[20] \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial g}{\partial u}(4, 8) = 10 & \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial v}(4, 8) = -2 \end{array} \right.$$

$$[21] \left\{ \begin{array}{ll} (21.1) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2, 3) = 2 & (21.2) \quad \frac{\partial f}{\partial u}(0, 1) = \frac{17}{6} \text{ e } \frac{\partial h}{\partial v}(0, 1) = -54 \end{array} \right.$$

$$[22] \beta = 2 \quad [23] 1, 06$$

$$[24] \left\{ \begin{array}{l} (24.1) \quad dw = \frac{3}{2} [x^{1/2}(yz)^{3/2} dx + y^{1/2}(xz)^{3/2} dy + z^{1/2}(xy)^{3/2} dz] \\ (24.2) \quad |dw| \leq 57,6 \end{array} \right.$$

$$[25] 0,7\text{cm}; 1,46\% \quad [26] \mathbb{R}\$1200 \quad [27] 1,05\pi^2$$

$$[28] \frac{28\pi}{3} m^3/\text{seg} \quad [29] 304\text{cm}^2/\text{seg} \quad [30] 2,8^\circ/\text{seg} \quad [31] -2 \text{ cm}^2/\text{seg} \quad [32] \frac{-8}{61} \text{ rad}/\text{min}$$

$$[33] \frac{-z^{1/3}}{3x^{1/3}} \quad [34] \frac{-\pi^2}{16} - 1 \quad [35] \frac{\partial f}{\partial x}(2, 0) = 0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(2, 0) = \frac{-1}{\ln 2}$$

[36]

$$(36.1) \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 6 \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{6} \end{array} \right. \quad (36.2) \left\{ \begin{array}{l} 6x + 3y + 2z = 18 \\ x - 1 = 2y - 4 = 3z - 9 \end{array} \right.$$

$$(36.3) \left\{ \begin{array}{l} \pi x + 18y - \pi z = 6\pi \\ \frac{x-1}{\pi} = \frac{y-\frac{\pi}{6}}{18} = -\frac{z+2}{\pi} \end{array} \right. \quad (36.4) \left\{ \begin{array}{l} z = 8 \\ (x, y, z) = (2, 2, 0) + t(0, 0, 1); \quad t \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$(36.5) \left\{ \begin{array}{l} z - x = 0 \\ (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, 0, -1); \quad t \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$[37] x + 6y - 2z - 3 = 0 \quad [38] x + 4y + 6z = 21 \quad \text{e} \quad x + 4y + 6z = -21$$

$$[39] \left\{ \begin{array}{l} \text{Não existe tangente à superfície paralelo ao plano } z = 0. \\ \text{Os planos tangentes à superfície nos pontos } (1, 1, 0) \text{ e } (1, -1, 0) \text{ são paralelos ao plano } y = 0 \\ \text{Os planos tangentes à superfície nos pontos } (0, 0, 0) \text{ e } (2, 0, 0) \text{ são paralelos ao plano } x = 0 \end{array} \right.$$

$$[40] \left\{ \begin{array}{l} (40.1) \ 2 \vec{i} + 2 \vec{j}; \ x + y - 2 = 0 \\ (40.2) \ 4 \vec{i} + \vec{j}; \ 4x + y - 3 = 0 \end{array} \right. \quad [41] \left\{ \begin{array}{l} (41.1) \ \left(-66, 107, \frac{143}{6} \right) \\ (41.2) \ (6, 4, -6) \end{array} \right.$$

$$[42] \left\{ \begin{array}{l} (42.1) \ 2(5x, \ 5y) \quad (42.2) \ \frac{-2}{(x^2 + y^2)^2} (x, \ y) \quad (42.3) \ 2(3x, \ y, \ -4z) \\ (42.4) \ \left(-y \operatorname{sen}(xy), \ -x \operatorname{sen}(xy) + z \cos(yz), \ y \cos(yz) \right) \\ (42.5) \ \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}, \ \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}, \ \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \\ (42.6) \ e^z \left(-2 \operatorname{sen}(2x) \cos(3y), \ -3 \cos(2x) \operatorname{sen}(3y), \ \cos(2x) \cos(3y) \right) \end{array} \right.$$

$$[43] \left\{ \begin{array}{l} (43.1) \ 10y^2 \quad (43.2) \ \frac{-2\sqrt{2}(x+y)}{(x^2 + y^2)^2} \\ (43.3) \ -y \operatorname{tg} x (\sqrt{3}y \sec^2 x - \operatorname{tg} x) \quad (43.4) \ \frac{1}{3} \left[(y-2x) \operatorname{sen}(xy) + (2z+2y) \cos(yz) \right] \\ (43.5) \ \frac{2\sqrt{3}}{3} \left[\frac{x-y-z}{x^2 + y^2 + z^2} \right] \quad (43.6) \ \sqrt{2}(x+z)e^{1+x^2+y^2+z^2} \end{array} \right.$$

$$[44] \left\{ \begin{array}{l} (44.1) \ 2\sqrt{13}, \ \vec{v} = (4, -6) \quad (44.2) \ \frac{e^6}{6} \sqrt{9\pi^2 + 6\pi + 10}, \ \vec{v} = \frac{e^6}{6} (3, 3\pi + 1) \\ (44.3) \ 3, \ \vec{v} = (0, -3, 0) \quad (44.4) \ 6, \ \vec{v} = (2, 4, 4) \end{array} \right.$$

$$[45] \left\{ \begin{array}{l} (45.1) \ \frac{32}{\sqrt{3}} \quad (45.2) \ (38, 6, 12) \quad (45.3) \ 2\sqrt{406} \end{array} \right.$$

$$[46] \left\{ \begin{array}{l} (46.1) \ \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}} \right) \quad (46.2) \ \text{subindo a } 60 \text{ m por m} \\ (46.3) \ \text{descendo a } 20\sqrt{2} \text{ m por m} \quad (46.4) \ \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right) \text{ ou } \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}} \right) \end{array} \right.$$

$$[47] \ -\frac{28}{\sqrt{2}}; \ (-12, -16); \ \lambda(4\vec{i} - 3\vec{j}); \ \lambda \neq 0$$

$$[48] \left\{ \begin{array}{l} (48.1) \ (0, 0) \text{ ponto min} \quad (48.2) \ \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right) \text{ ponto max} \\ (48.3) \ (0, 0) \text{ max}; \ (1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2) \text{ selas} \quad (48.4) \ \left(-\frac{1}{4}, 16 \right) \text{ ponto max.} \\ (48.5) \ (-1, -1) \text{ ponto min}; \ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \text{ ponto max} \quad (48.6) \ \left((2n+1)\pi, (2n+1)\pi \right), \ n \in \mathbb{Z} \\ (48.7) \ (1, 2) \text{ ponto min.} \quad (48.8) \ \text{n\~ao existe pontos criticos} \end{array} \right.$$

$$[49] \ 8 \quad [50] \ 4cm \text{ por } 4cm \quad [51] \ \frac{c}{2} \text{ de A, } \frac{c}{3} \text{ de B} \quad [52] \ 4a$$

$$[53] \left\{ \begin{array}{l} (53.1) \ (0, 0), \ (0, 4) \quad (53.2) \ \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right) \\ (53.3) \ (0, 0) \quad (53.4) \ \left(\frac{12}{13}, -\frac{8}{13}, 0 \right) \\ (53.5) \ (2, -2, 2) \end{array} \right.$$

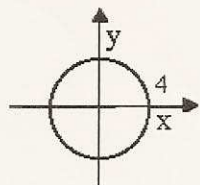
- [41] Triângulo equilátero [40] $P(2, 1), Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$
- [56] $T_{max} = \sqrt{14}$ em $\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ e $T_{min} = -\sqrt{14}$ em $\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$
- [59] $(1, 1, 1)$ e $(-1, -1, -1)$ [60] 4cm por 4cm por 2cm

2) a)

$$D(f) = \mathbb{R}^2$$

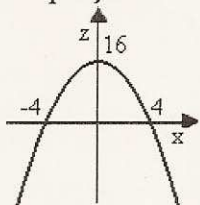
$$G(f) \cap X_oY:$$

$$\text{círculo de equação } x^2 + y^2 = 16$$



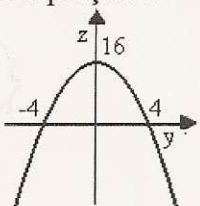
$$G(f) \cap X_oZ:$$

$$\text{Parábola de equação } z = 16 - x^2$$



$$G(f) \cap Y_oZ:$$

$$\text{Parábola de equação } z = 16 - y^2$$



Curvas de nível

Para $z = k$,

$$k < 16: \text{círculo de equação } x^2 + y^2 = (\sqrt{16-k})^2$$

$$k = 16: \text{ponto } (0,0)$$

$$k > 16: \emptyset$$

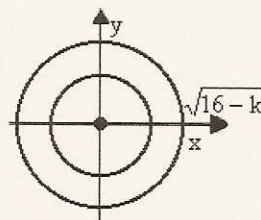
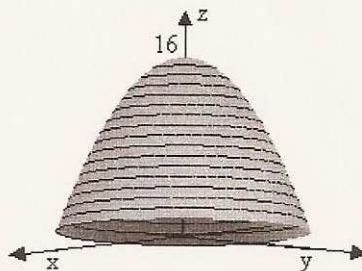


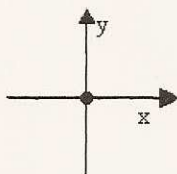
Gráfico: (um parabolóide de revolução)



2) b)

$$D(f) = \mathbb{R}^2$$

$$G(f) \cap X_oY: \text{ponto } (0,0)$$



$$G(f) \cap X_oZ:$$

$$\text{Parábola de equação } z = 9x^2$$

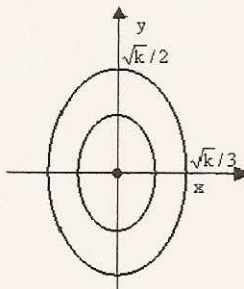
Curvas de nível

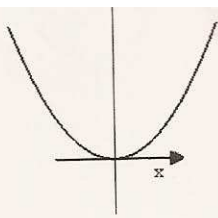
Para $z = k$,

$$k > 0: \text{elipse de equação } \frac{x^2}{(\sqrt{k}/3)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{k}/2)^2} = 1$$

$$k = 0: \text{ponto } (0,0)$$

$$k < 0: \emptyset$$





$G(f) \cap Y_0Z:$

Parábola de equação $z = 4y^2$

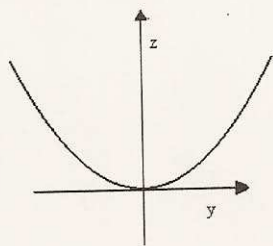
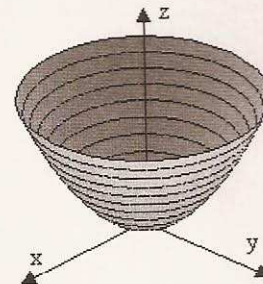


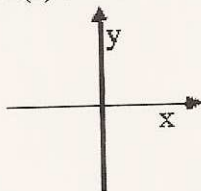
Gráfico:



2) c)

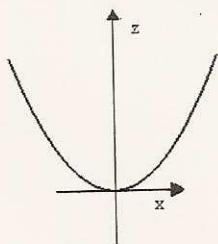
$D(f) = \mathbb{R}^2$

$G(f) \cap X_0Y:$ o eixo OY

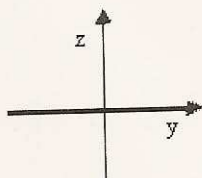


$G(f) \cap X_0Z:$

Parábola de equação $z = x^2$



$G(f) \cap Y_0Z:$ o eixo OY



Curvas de nível

Para $z = k$,

$k > 0$: as retas $x = \sqrt{k}$ e $x = -\sqrt{k}$

$k = 0$: o eixo OY

$k < 0$: \emptyset

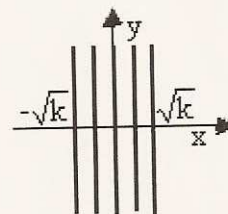
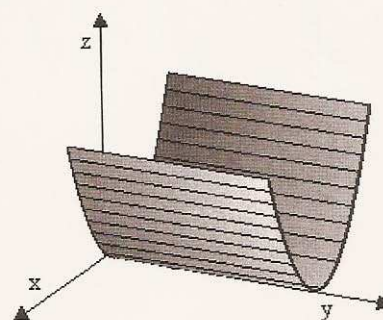


Gráfico: (uma superfície cilíndrica)

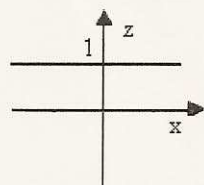


2) d)

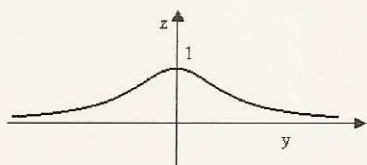
$$D(f) = \mathbb{R}^2$$

$$G(f) \cap X_oY: \emptyset$$

$$G(f) \cap X_oZ: \text{a reta } z=1$$



$$G(f) \cap Y_oZ: \text{a curva } z = 1/(1+y^2)$$



Curvas de nível

Para $z = k$,

$$0 < k < 1: \text{as retas } y = \sqrt{1/k-1} \text{ e } y = -\sqrt{1/k-1}$$

$$k = 1: \text{o eixo OX}$$

$$k > 1 \text{ ou } k \leq 0: \emptyset$$

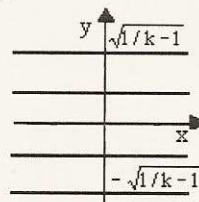
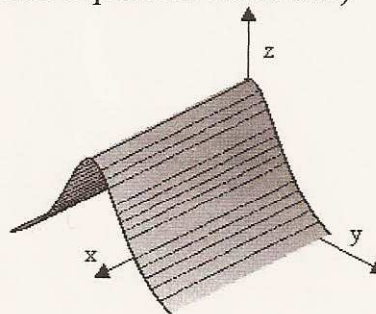


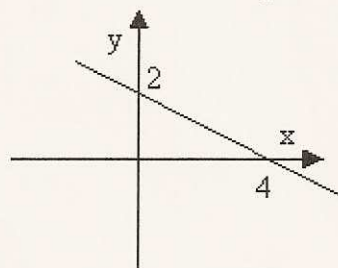
Gráfico: (uma superfície cilíndrica)



2) e)

$$D(f) = \mathbb{R}^2$$

$$G(f) \cap X_oY: \text{a reta } y = -\frac{x}{2} + 2$$

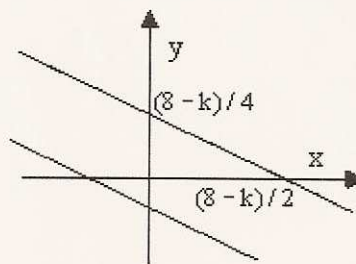


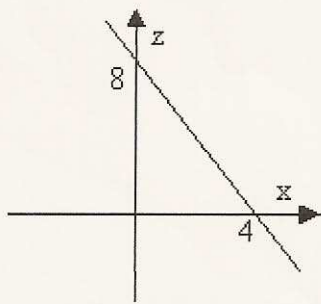
$$G(f) \cap X_oZ: \text{a reta } z = -2x + 8$$

Curvas de nível

Para $z = k$,

$$\forall k \in \mathbb{R}: \text{a reta } y = -\frac{x}{2} + \frac{8-k}{4}$$





$G(f) \cap Y_oZ$: a reta $z = -4y + 8$

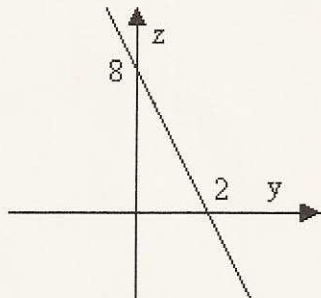
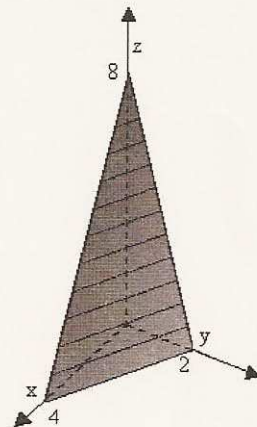


Gráfico: (um plano)

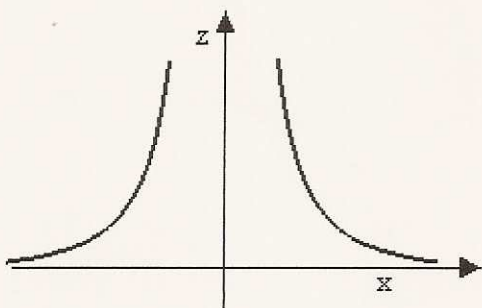


2) f)

$$D(f) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

$$G(f) \cap X_oY: \emptyset$$

$$G(f) \cap X_oZ: \text{a curva } z = 4/x^2$$



$$G(f) \cap Y_oZ: \text{a curva } z = 1/y^2$$

Curvas de nível

Para $z = k$,

$$k > 0: \text{elipse de equação } \frac{x^2}{(2/\sqrt{k})^2} + \frac{y^2}{(1/\sqrt{k})^2} = 1$$

$$k \leq 0: \emptyset$$

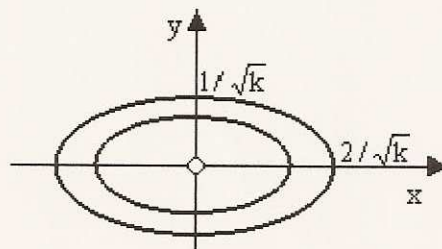
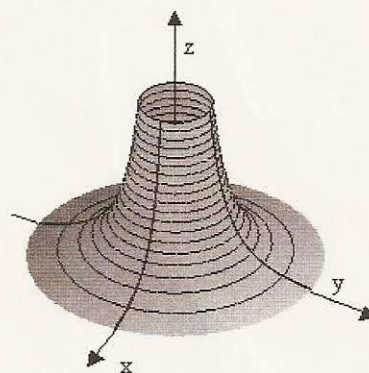
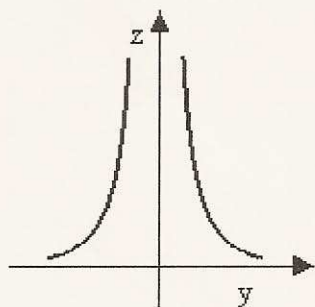


Gráfico:

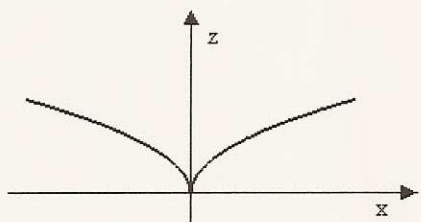


2) g) $f(x, y) = 4\sqrt{x^2 + y^2}$

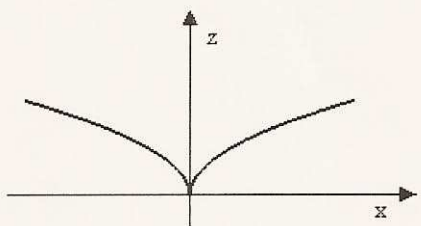
$D(f) = \mathbb{R}^2$

$G(f) \cap X_oY$: o ponto (0,0)

$G(f) \cap X_oZ$: a curva $z = \sqrt{|x|}$



$G(f) \cap Y_oZ$: a curva $z = \sqrt{|y|}$



Curvas de nível

Para $z = k$,

$k > 0$: círculo de equação $x^2 + y^2 = (k^2)^2$

$k = 0$: o ponto (0,0)

$k < 0$: \emptyset

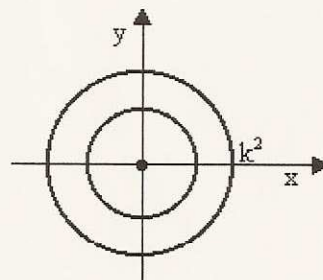


Gráfico: (uma superfície de revolução)

